ECOLE POLYTECHNIQUE

CONCOURS D'ADMISSION 1978

OPTION M'

DEUXIEME COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

(4 heures)

E désigne un espace affine euclidien de dimension 3 , rapporté à un repère orthonormé $Oxyz$.

On peut traiter la partie II sans avoir traité la partie I .

Partie I

α et λ sont deux nombres réels donnés. A toute application f d'un intervalle ouvert, non vide, J de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (J dépendant de f), deux fois continûment dérivable, on associe la surface S_f de E , ensemble des points de coordonnées x , y , z , telles que l'on ait $x \cos\alpha + y \sin\alpha \in J$ et

(1) $$z = f(x\cos\alpha + y\sin\alpha) + \lambda(-x\sin\alpha + y\cos\alpha) .$$

I - 1°/ Montrer que, quelle que soit f , la surface S_f est cylindrique (c'est-à-dire qu'elle est une réunion de droites parallèles) .

I - 2°/ On dira que f est *admissible* si la condition suivante est satisfaite : quel que soit $M \in S_f$, le plan tangent à S_f en M rencontre la droite Ox en un point P et un seul, et la droite Oy en un point Q et un seul. Expliciter cette condition.

Soit ℓ un nombre réel ≥ 0 . f étant supposée admissible, on désigne par ξ la première coordonnée de P et par η la seconde coordonnée de Q (les autres coordonnées de P et Q sont nulles) . Montrer que, pour que l'on ait constamment $\xi + \eta = \ell$, il faut et il suffit que f soit solution de l'équation différentielle

$$(\mathcal{E}) \qquad \left(t\frac{du}{dt} - u\right)\left[(\cos\alpha + \sin\alpha)\frac{du}{dt} + \lambda(\cos\alpha - \sin\alpha)\right]$$

$$- \ell\left(\cos\alpha\frac{du}{dt} - \lambda\sin\alpha\right)\left(\sin\alpha\frac{du}{dt} + \lambda\cos\alpha\right) = 0 ,$$

où t est la variable et $t \mapsto u$ la fonction inconnue.

.../...

Dans toute la suite de cette partie I, on suppose $\lambda \neq 0$.

I - 3° / Dans cette question, on prend $\ell = 0$

Après avoir intégré les équations différentielles

$$(\mathcal{E}_1) \qquad t\frac{du}{dt} - u = 0$$

et

$$(\mathcal{E}_2) \qquad (\cos\alpha + \sin\alpha)\frac{du}{dt} + \lambda(\cos\alpha - \sin\alpha) = 0 \ ,$$

montrer que, étant donnée une application g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continûment dérivable, pour que g soit une solution de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}$, il faut et il suffit que g soit une solution de $(\mathcal{E}_1)$ sur $\mathbb{R}$ ou une solution de $(\mathcal{E}_2)$ sur $\mathbb{R}$ (pour vérifier que la condition est nécessaire, on pourra, en désignant par $G(t)$ la valeur prise par le premier membre de $(\mathcal{E}_2)$ quand on y remplace $\frac{du}{dt}$ par $g'(t)$, montrer la propriété suivante : si g est une solution de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}$ et s'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que l'on ait $G(t_0) \neq 0$, alors, quel que soit $t \in \mathbb{R}$, on a $G(t) \neq 0$).

Parmi les solutions de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}$, quelles sont les fonctions admissibles ? Quelles sont les surfaces S_f associées à ces fonctions admissibles ?

I - 4° / Dans toute la suite de cette partie I, on suppose $\ell > 0$.

Par dérivation à partir de $(\mathcal{E})$, former une équation différentielle linéaire du premier ordre $(\mathcal{F})$, vérifiée par toute solution de $(\mathcal{E})$ sur tout intervalle où elle est deux fois dérivable et où sa dérivée seconde ne s'annule pas.

Intégrer $(\mathcal{F})$, en distinguant les cas $\cos\alpha + \sin\alpha = 0$ et $\cos\alpha + \sin\alpha \neq 0$.

I - 5° / Dans cette question, on se place dans le cas $\cos\alpha + \sin\alpha \neq 0$.

Montrer que l'équation $(\mathcal{E})$ n'admet pas de solution sur $\mathbb{R}$, deux fois continûment dérivable, autre que des fonctions affines que l'on déterminera. Parmi celles-ci, quelles sont les fonctions admissibles ? Quelles sont les surfaces S_f associées à ces fonctions admissibles ?

I - 6° / Dans cette question, on se place dans le cas $\cos\alpha + \sin\alpha = 0$.

Montrer que l'équation $(\mathcal{E})$ admet une solution g sur $\mathbb{R}$ et une seule qui soit deux fois continûment dérivable et qui ne soit pas une fonction affine. Expliciter g.

.../...

Trouver les intervalles ouverts $\mathcal{I}$ de $\mathbb{R}$ tels que la restriction de g à $\mathcal{I}$ soit admissible et qu'il n'existe pas d'intervalle ouvert contenant $\mathcal{I}$ et distinct de $\mathcal{I}$, ayant la même propriété.

Ecrire l'équation de la surface S_g. Quelle est sa section par le plan xOy ? Représenter graphiquement cette section ; on précisera quelle partie du graphe correspond à chacun des intervalles $\mathcal{I}$.

Partie II

Dans cette partie, on fait varier α et λ ; et l'on prend $J = \mathbb{R}$. A tout triplet (α, λ, f), α et λ décrivant $\mathbb{R}$, f décrivant l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, deux fois continûment dérivables, on associe la surface définie par l'équation (1) de la partie I. Et l'on désigne par $\mathcal{S}$ l'ensemble des surfaces ainsi obtenues.

On se propose de donner une caractérisation *géométrique* des surfaces qui appartiennent à $\mathcal{S}$. Pour cela, on remarque que, si une surface Σ appartient à $\mathcal{S}$, elle satisfait aux conditions suivantes (il est inutile d'en expliciter la vérification, qui est immédiate compte-tenu de ce qui a été vu dans la partie I et des propriétés classiques des surfaces cylindriques) :

a) Σ a une équation de la forme $z = \varphi(x, y)$, où φ est une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, dont toutes les dérivées premières et secondes existent et sont continues ;

b) Σ est une réunion de droites ;

c) pour toute droite D de Σ, le plan tangent à Σ en un point M de D est indépendant de M.

On va établir la réciproque. Dans toute la suite, Σ est une surface satisfaisant aux conditions a), b) et c).

I - 1°/ Montrer que, si Σ est un plan, Σ appartient à $\mathcal{S}$.

II - 2°/ Dans cette question, on suppose qu'il existe sur Σ deux droites D_1 et D_2, distinctes, dont les projections orthogonales sur le plan xOy ont une intersection non vide.

Montrer que l'intersection de D_1 et D_2 contient un point et un seul.

Montrer que toute droite de Σ appartient au plan Π contenant D_1 et D_2. Et, à l'aide de ce résultat, montrer que l'on a $\Sigma = \Pi$.

II - 3°/ Dans cette question, on suppose que Σ n'est pas un plan.

Montrer que les droites de Σ sont parallèles et que Σ appartient à $\mathcal{S}$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail